Severiの定理の一般化

前原, 和寿

代数幾何学シンポジウム記録
1978年度　pp.64-79

Severi の定理の一般化

東京工芸大 工　前原和寿

1. はじめに、

曲線に関する定理で次の事が知られている。

定理(Severi)　kを代数閉体とし，Kをkの代数関数体とする。Kの中間体で，超越次数が1，種数が2以上で，Kが分離的になるような中間体たちは有限個である。

このことを一般化して，一般型代数多様体の場合に上記の定理を作れというのが飯高先生の昔のレポート問題であった。標数零の代数閉体kに限ってみると，k上の代数関数体Kの中には複雑な構造を持つ中間体があまりないという意味になる。m重種数P_mが複雑さの度合を示すのならば，超越次数の等しい体では，構造の簡単なものが複雑なものを含まないことがわかる。超越次数の異なる場合でも，複雑な体の入れ子限界がある。

次に一般型代数多様体に対応する体以外の場合も考えてみると，中間体があまりないなど

ということは期待できない。しかし，同型な体を同一視すればあまりない。あまりないという言葉を定義しておく。

$\mathfrak{F}^c = \{(f, Y) \mid Y$ は条件 c を有する完備非特異多様体で $X \to Y$ は全射正則写像（又は支配的有理写像）$\}$ 但し X は与えられた完備代数多様体上の集合に同値関係を与える。

$(f, Y) \sim_1 (f', Y') \Leftrightarrow$ 双正則写像（又は双有理写像）$\mu : Y \to Y'$ があって $f' = \mu \circ f$

$(f, Y) \sim_2 (f', Y') \Leftrightarrow$ 双正則写像（又は双有理写像）$\mu : Y \to Y'$ がある。

商集合 $\mathfrak{F}^c/\sim_1$（又は $\mathfrak{F}^c/\sim_2$）が有限集合のとき，$\mathfrak{F}^c$ は正則写像（又は有理写像）も込めて同型を除いて有限ということにする。商集合 $\mathfrak{F}^c/\sim_2$ が有限集合のとき同型を除いて有限ということにする。他の言葉もこのことから類推して欲しい。

k を標数 0 の代数閉体とし，その上の固有，既約，被約，な algebraic space X を与える。

$\mathfrak{F}^{ample} = \{(Y, f) ; Y$ は完備非特異代数多様体で ample canonical divisor を有する。$f : X \to Y$ は全射正則写像$\}$

主定理　$\mathfrak{F}^{ample}$は正則写像も込めて同型を除いて有限である。

これは、予想からは程遠い結果であるが仕方がない。

2、命題と定理。

定理1．$\mathfrak{F}^{ample}$は正則写像も込めて同型を除いて有限である。

~~注）．$\mathfrak{F}^{b.am} = \{(f, Y) \mid Y$は完備非特異代数多様体で完備非特異代数多様であってample canonical divisorを有するものに双有理同値とする。$\}$~~

~~$\mathfrak{F}^{b.am}$も正則写像も込めて同型を除いて有限となる。~~

次にample canonical divisorから一歩でて、一般型代数多様体の場合を考えてみる。一般型代数多様体は定義から、非特異のときmulti-canonical divisorで双有理的に射影空間への埋め込みができる。しかし、Xの像となるもの全体を考えると、有限回の操作で上の意味で射影空間に埋め込むことが困難になる。

このことは飯高先生の κ の言葉では，$\kappa(Y)=\dim Y$ と $\kappa(Y)=\dim Y-1$ の境界に弱々しい一般型代数多様体が果しなく連なっているかということになる。そこで $2\dim X+1$ 次元の射影空間の中にすべての X の像となる一般型代数多様体を埋め込でおく。そして次のような ascending filtration を与える。　$F_m=\{Y \mid Y$ は完備非特異一般型代数多様体で K_Y を canonical divisor，H_Y を射影空間から誘導された hyperplane section とすると $|mK_Y-H_Y|\neq\phi\}$

命題 1.2. F_m は正則写像も含めて同型を除いて有限。

問題. 十分大きな m に対して $F_m=F_{m+1}$ が言えるか。

曲面の場合　Y を曲面とし，一般型非特異射影的代数多様体とする。この場合

$\mathfrak{F}^{g.s}=\{(f,Y) \mid Y$ は完備非特異曲面で一般型としかつ極小（第一種例外曲線を持たない）とする。$\}$ は正則写像も込めて同型を除いて有限が言えるだろう。

一般型代数多様体であるような X の像を扱うとき，次の3種類の分け方がある。

(イ)　F_m で考える。

(ロ)　K_Y を標準因子として，$|mK_Y|$ (complete linear system) に付随した有理写像が双有理となるような代数多様体 Y たちを扱う。

(ハ)　Y を適当な射影空間に埋め込まれていると考えてその次数 H_Y^n が有界なものを扱う。

問．$\mathfrak{F}^{\text{general}} = \{(f, Y) \mid Y$ は完備非特異一般型代数多様で $X \xrightarrow{f} Y$ 支配的有理写像$\}$ この中で Y が標準因子 K_Y を ample とするものが cofinal にあるか。i.e. $Y \in \mathfrak{F}^{\text{general}}$ に対して $Y \longrightarrow Y^{\text{ample}}$ 支配的有理写像で Y^{ample} は Y と同次元で標準因子が ample。

問．$\mathfrak{F}^{\text{general}}$ の中に strongly minimal なものはどの位あるか（又は cofinal か）。

次に一般型以外のものを考えると，次のことがわかる。X を proper (integral) algebraic space とする。$\mathfrak{F}^{0} = \{(f, Y) \mid Y$ は非特異射影的多様体とし $f : X \longrightarrow Y$ は全射正則写像とする。$\}$

定理2. $\mathfrak{F}^0$は正則写像を込めず同型を除いて高々可算個である。

正則写像も含めて考えるときには次のように変えればよい。

$\mathfrak{F}^1 = \{(f, Y) \mid Y$は非特異射影的多様体で $X \xrightarrow{f} Y$は全射正則写像かつ次の性質を持つ.
$H^0(X, f^*\Theta_Y) = 0$ 但しΘ_Yは正則接ベクトルの層$\}$

注意2.1. $\mathfrak{F}^1$は正則写像も含めて同型を除いて高々可算である。

これらはcompact Kähler manifoldsの場合に拡張できる。

3. 証明.

Chowの補題から非特異射影多様体からintegral proper algebraic space上への全射正則写像があるから今後Xは非特異射影多様体と仮定する。

補題1. Hilbert多項式 $\chi(Y, mK_Y)$は有限個である。ただし$Y \in \mathfrak{F}^{ample}$.

補題の証明

小平消失定理から　$\chi(Y, mK_Y) = h^0(Y, mK_Y)$

$m \geqq 2$. そこで次の不等式

$$0 \leqq h^0(Y, mK_Y) \leqq h^0(X, S^m \wedge^n \Omega^1_X)$$

但し S^m (又は $\wedge^n$) は symmetric algebra (又は exterior algebra) の階数 m (又は n) の $\mathcal{O}_X$-Module とする。

$n = \dim Y$ 。

このことから多項式 (n次の) が $n+1$ 個の値から定まることを考慮して補題1が得られる。

補題1と松坂の定理を用いて $\mathfrak{F}^{ample}$ に含まれる多様体 Y は有限個の射影空間に次のように埋込できる。射影空間 $\mathbb{P}^N$ を一つきめるとその上の very ample invertible sheaf H_p に対して同型 $m_0 K_Y \cong j^* H_p$ がある。但し m_0 は Hilbert 多項式だけで定まる。$j : Y \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ 。

次に $X \xrightarrow{f} Y$ のグラフを $X \times \mathbb{P}^N$ の中で考える。H_X を $H_X \otimes K_X^{-1}$ が ample となるような ample invertible sheaf とする。

補題2. $(f, Y) \in \mathfrak{F}^{ample}$ に対して正則写像のグラフの Hilbert 多項式は有限個である。

証明　小平消失定理から

$$\chi(X, m(H_X + f^* m_0 K_Y)) = h^0(X, m(H_X + f^* m_0 K_Y)) \text{ for } m \geq 1.$$

そこで $0 \leq h^0(X, m(H_X + f^* m_0 K_Y)) \leq h^0(X, H_X^{\otimes m} \otimes S^{m m_0} \wedge^n \Omega^1_X)$.

を得るが、補題1と同様の議論で補題2を得る。

Hilbert scheme $\mathrm{Hilb}_{X \times \mathbb{P}^N}$ の open subscheme $\underline{\mathrm{Hom}}(X, \mathbb{P}^N)$ で X から $\mathbb{P}^N$ への正則写像を parametrize する。

補題2できまる Hilbert polynomial $P(m)$ に関する成分 $\underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$ を考えればよい。これは quasi-projective scheme である。

次の図式

$$\begin{tikzcd}
X \times \underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{P}^N \times \underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) \arrow[dl] \\
& \underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) &
\end{tikzcd}$$

がある。Γ を Hilbert functor の普遍元とする。

Ξ を $\Gamma \underset{(\mathrm{Hom})}{\subset} X \times \mathbb{P}^N \times \underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) \longrightarrow \mathbb{P}^N \times \underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$

の像とする。これは closed である。

Ξ を $\underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$ 上考えるとき flattening stratification して $\coprod_{i \in I} Z_i \hookrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$ （I：有限集合）

$\Xi_{(Z_i)} \longrightarrow Z_i$ は flat とする。$Y \in \mathfrak{F}^{\mathrm{ample}}$ は

$\Xi \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N)$ の fibres の中にすべて入っているとしてよい。

$$H_{\text{non-singular}} = \{ t \in \underline{\mathrm{Hom}}^{P(m)}(X, \mathbb{P}^N) \mid \Xi_t \in \mathfrak{X}^{\text{ample}} \}$$

$$Z_{i,\text{smooth}} = \{ t \in Z_i \mid \Xi_t \text{ が smooth} \}$$

$$H_{\text{smooth}} = \bigcup_{i \in I} Z_{i,\text{smooth}}$$

このとき $H_{\text{smooth}} \supset H_{\text{non-singular}}$ を得る。

また $Z_{i,\text{smooth}} \hookrightarrow Z_i$ は open である。

実際 $\Xi_{Z_i} \to Z_i$ は proper, flat で of finite presentation だから。

それで $\Xi_{(Z_i,\text{smooth})} \longrightarrow Z_{i,\text{smooth}}$ を考えればよい。

$\Xi_{(Z_i,\text{smooth})\,\text{red}} \longrightarrow (Z_i,\text{smooth})_{\text{red}}$ を扱う。

smoothening stratification をして

$\coprod_{j \in J_i} S_{ij} \hookrightarrow (Z_{i,\text{smooth}})_{\text{red}}$ 但し J_i は有限

S_{ij} smooth とする。

補題（堀川（未承認）藤田）

X を完備非特異多様体とし $\mathfrak{X} \to S$ を proper smooth morphism とする。S は regular affine scheme とする。

仮定
$$\begin{tikzcd} X \times S \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "p"'] & \circlearrowleft & \mathfrak{X} \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$
が全射正則とする。

そのとき Kodaira-Spencer 写像

$$\rho_t : \Theta_{S,t} \longrightarrow H^1(\mathfrak{X}_t, \Theta_{\mathfrak{X}_t}) \text{ は zero map..}$$

$$
\begin{tikzcd}
\Theta_S \arrow[r, "0"] \arrow[d, equal] & R^1 p_* \Theta_{X\times S/S} \arrow[d] \\
\Theta_S \arrow[r, "\wr"] \arrow[d, equal] & R^1 p_* \psi^* \Theta_{\mathfrak{Y}/S} \\
\Theta_S \arrow[r, "\wr"] & R^1 q_* \Theta_{\mathfrak{Y}/S} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

の図式と $H^1(\mathfrak{Y}_t, \Theta_{\mathfrak{Y}_t}) \longrightarrow H^1(X, \psi_t^* \Theta_{\mathfrak{Y}_t})$ が単射なことから $\rho_t = 0$ for $t \in S'$ を得る。 Q.E.D.

Kodaira-Spencer の変形理論から $\dim H^1(\mathfrak{Y}_t, \Theta_t)$ が一定で $\rho_t = 0$ for $^\forall t \in S$ ならば $\mathfrak{Y} \xrightarrow{q} S$ は locally trivial である。 $\dim H^1(\mathfrak{Y}_t, \Theta_t)$ は上半連続だから S_{ij} を stratificate して $\coprod_{k \in K_{ij}} T_{ijk} \hookrightarrow S_{ij}$ （K_{ij} 有限） T_{ijk} 上で $\dim H^1(\mathfrak{Y}_t, \Theta_t)$ が一定になるようにできる。 $\Xi_{(T_{ijk})} \longrightarrow T_{ijk}$ に補題3を適用すれば fibres は同型になる。 以上のことから定理は証明された。

以下は寝言かも知れないが，支配的有理写像の場合を考えてみる。

$\mathcal{F}^{ample}_{rat} = \{ (f, Y) \mid Y$は固有非特異多様体で標準因子がampleとし$X \overset{f}{\dashrightarrow} Y$が支配的有理写像とする。$\}$

$Y \in \mathcal{F}^{ample}_{rat}$が補題1のHilbert多項式をもつことはすぐわかる。

ところが補題2に相当する方が困難なので，次のようにしてみる。$X \overset{f}{\dashrightarrow} Y$のグラフは閉包を考えて$\Gamma \longrightarrow Hilb_{X \times \mathbb{P}^N}$のfibresの中に入っている。

$$\Gamma \hookrightarrow X \times \mathbb{P}^N \times Hilb_{X \times \mathbb{P}^N} \longrightarrow \mathbb{P}^N \times Hilb_{X \times \mathbb{P}^N}$$

の像をΞとおく。

$\Xi \longrightarrow Hilb_{X \times \mathbb{P}^N}$のfibresの中に$\mathcal{F}^{ample}_{rat}$はすべて含まれている。先程と同じようにして

$$\Xi_{smooth} \longrightarrow (Hilb_{X \times P^N})_{smooth} \xhookrightarrow[open]{} Hilb_{X \times P^N}$$

$\Xi_{smooth} \longrightarrow (Hilb_{X \times \mathbb{P}^N})_{smooth}$のfibresはすべてのnon-singular fibresを含んでいるとしてよい。

$$(\Xi_{smooth})_{red} \longrightarrow ((Hilb_{X \times P^N})_{smooth})_{red}$$

smoothening stratificationをしてさらに

$t \in ((Hilb_{X \times \mathbb{P}^N})_{smooth})_{red}$のfibre Ξ_tの標準因子ω_t
(multiple fibreは除く)として

$h^0(\Xi_t, \omega_t^{\otimes m_0})$ が一定になるように stratification する。このとき $\omega^{\otimes m_0}$ によって引き起される有理写像を考えその像の次元が下がらないような base scheme の点を考えると locally closed である。それを H とする。$H \hookrightarrow \mathrm{Hilb}_{X \times \mathbb{P}^N}$ ~~locally closed~~ ~~constructible~~

従って H は locally noetherian scheme.

$\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ の universality から $H \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^N}$ の morphism が唯一つ存在する。この射 φ は locally of finite type である。H は作り方から一般型代数多様体への支配的有理写像の一部を parametrize していて $\mathfrak{F}^{ample}_{rat}$ のそれを含んでいる。

Kobayashi-Ochiai の定理から φ の fibre は有限個である。従って φ は quasi-finite となる。

$\mathrm{Hilb}^{P(m)}_{\mathbb{P}^N}$ に φ を引きもどせば $H \times_{\mathrm{Hilb}_{\mathbb{P}^N}} \mathrm{Hilb}^{P(m)}_{\mathbb{P}^N}$ は Noetherian scheme となる。このことから、

$\mathfrak{F}^{ample}_{rat}$ が有理写像も含めて双有理変換を除いて有限個であることを言うには

補題3の類似品として ~~Kawamata Deformation を使う。~~

補題

$$\begin{array}{ccc} X \times S & \overset{\psi}{\dashrightarrow} & \mathcal{Y} \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & S & \end{array}$$

ψ 支配的有理写像

(S の各 fibre 上で dense domain)

このとき $\mathcal{Y}$ の fibres は S を ~~...~~ 適当に stratification した上で双有理同値。」

が言えればよい。

補題

$$\begin{tikzcd} \overline{\mathcal{X}} \arrow[r, "\overline{\Psi}"] & \overline{\mathcal{Y}} \\ \mathcal{X} \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr] \arrow[r, phantom, shift right=20, "2"] & \mathcal{Y} \arrow[u, phantom, sloped, "\subset"] \arrow[d] \\ & S \end{tikzcd}$$

Ψ は surjective morphism.

$\mathcal{F}_{\mathcal{X}} = (\mathcal{X}, \overline{\mathcal{X}}, \overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}, \overline{\pi}_{\mathcal{X}}, S)$ $\quad \mathcal{F}_{\mathcal{Y}} = (\mathcal{Y}, \overline{\mathcal{Y}}, \overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}, \overline{\pi}_{\mathcal{Y}}, S)$

(1) $\overline{\pi}_{\mathcal{X}} : \overline{\mathcal{X}} \longrightarrow S$ (又は $\overline{\pi}_{\mathcal{Y}}$) は proper smooth morphism

(2) $\overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{X}}$ (又は $\overline{\mathcal{D}}_{\mathcal{Y}}$) は $\overline{\mathcal{X}}$ (又は $\overline{\mathcal{Y}}$) の closed subset of $\overline{\mathcal{X}}$

このとき $\mathcal{X}$ が S 上 locally trivial ならば $\mathcal{Y}$ が locally trivial.

この補題は $\rho_{s_0} : T_{S, s_0} \longrightarrow H^1(\overline{\mathcal{Y}}_s, T_s(\log \overline{D}_{\mathcal{Y}_s}))$ が zero となることと、適当な stratification で $\dim H^1(\overline{\mathcal{Y}}_s, T_s(\log \overline{D}_{\mathcal{Y}_s}))$ を一定にすればよい。

さて ~~$\mathcal{X} = (X-D)\times S$~~ に対して

$$\begin{tikzcd} X \times S \arrow[rr, dashed, "\Psi"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, phantom, shift right=12, "2"] & & \mathcal{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

S を S 上の任意の curve C 上で考える。

$$\begin{tikzcd} X \times C \arrow[rr, dashed, "\psi_c"] \arrow[dr] & & 甘(C) \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

ψ_c の不定義点は C の任意点上 X で余次元が2以上である。
そこでそれを C に沿って動かしても余次元2以上
そこで

$$\begin{tikzcd} \overline{\Xi} \arrow[d, phantom, "\cup"] \arrow[drr] & & \\ (X-D)\times C \arrow[rr] \arrow[dr] & & 甘(C) \arrow[dl] \\ & C & \end{tikzcd}$$

という図式ができる。$(X-D)\times C$ は C 上 trivial であることから補題がでてくるであろう。

参考文献

(1) A. Fujiki : Closedness of the Douady Spaces of compact Kähler spaces. P. R. I. M. S. Kyoto Univ. Vol 14. No1 1978.

(2) T. Fujita : On Kähler fibre spaces over curves. J. M. S. J. Vol. 30. No 4, 1978

(3) A. Grothendieck : Techniques de contruction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV, Les schémas de Hilbert, Séminaire Bourbaki, t. 13, 1960/61 n° 221.

(4) S. Iitaka : On D-dimensions of algebraic varieties J. M. S. J, 23, 356-373, (1971).

(5) E. Horikawa : The rigidity theorem (unpublished)

(6) H. Kurke : An algebraic proof of a Theorem of S. Kobayashi and T. Ochiai Forschungsinstitut für Mathematik eth Zürich (1978)

(7) S. Kobayashi and T. Ochiai : Meromorphic mappings onto complex spaces of general type

(8) T. Matsusaka : Polarized varieties with a given Hilbert polynomial Amer. J. Math (94) (1972).

(9) M. M-Deschamps and R. L-Menegaux :
Applications rationelles separables dominantes sur une variéte de type general. C.R. Acad. Sc. Paris. t285 (1977)

(10) D. Mumford : Lectures on curves on surfaces
Princeton Univ. Press.

(11) C.P. Ramanujam : Remarks on the Kodaira vanishing Theorem
J. of the Indian Math. Soc, 36 (1972)

(12) Y. Kawamata : On deformations of compactifiable complex manifolds.
Math. Ann. 235, 247-265 (1978)